Субпуассоновская статистика однонаправленных случайных скачков по окружности

В. А. Маркель

Автометрия 1991, № 6, стр. 111-114

Поступило в редакцию 29 апреля 1991 г.

Вычислен параметр субпуассоновской статистики ξ однонаправленных случайных скачков по окружности. Показано, что при определенных условиях, ξ может стремиться к -1, что соответствует очень сильной антигруппировке событий. Рассматриваются приложения модели однонаправленных скачков к статистике ступенчатого возбуждения многоуровневых систем, в частности к фотонной статистике.

Значительные потоки излучения и возможность внутренней его модуляции по заданному закону, осуществляемой слабым электрическим полем, простота изготовления и миниатюрное исполнение предопределяют разнообразные возможности применения описанного излучателя в оптических устройствах самого различного назначения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берг А., Дин П. Светодиоды // ТИИЭР.—1972.—60, № 2.
2. Малютенко В. К., Липтуга А. И., Моин М. Д., Тесленко Г. И. Кинетика теплового излучения полупроводников конечных размеров // УФЖ.—1985.—30, № 12.
3. Malyutenko V. K., Botte V. A., Chernyakhovsky V. I. Infrared emission of free carriers in semiconductors below the fundamental absorption edge // Infr. Phys.—1989.—29, N 1.
4. Malyutenko V. K., Liptuga A. I., Teslenko G. I., Botte V. A. Thermal emission of semiconductors under nonequilibrium conditions // Ibid.—N 2—4.
5. Оптические свойства полупроводников $A^{III}B^{V}$ /Под ред. Р. Уиллардсона, А. Бира.—М.: Мир, 1970.
6. Болгов С. С., Малютенко В. К., Пипа В. И., Яблоновский Е. И. Модуляция теплового излучения полупроводников в изотермических условиях // УФЖ.—1989.—34, № 1.

Поступило в редакцию 11 марта 1991 г.

УДК 519.218 : 535

В. А. Маркель

(Новосибирск)

СУБПУАССОНОВСКАЯ СТАТИСТИКА ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СКАЧКОВ ПО ОКРУЖНОСТИ

Вычислен параметр субпуассоновской статистики ξ однонаправленных случайных скачков по окружности. Показано, что при определенных условиях ξ может стремиться к —1, что соответствует очень сильной антигруппировке событий. Рассматриваются приложения модели однонаправленных скачков к статистике ступенчатого возбуждения многоуровневых систем, в частности к фотонной статистике.

Рассмотренная ниже проблема случайных однонаправленных скачков возникает, в частности, при изучении ступенчатого возбуждения многоуровневых систем с последующим возвращением на основной уровень и выделением энергии (например, в виде излучения фотона). Как известно, статистика таких событий вследствие эффекта «мертвого времени» является субпуассоновской [1—3]. В работе [4] экспериментально показано, что эффект «мертвого времени» действительно приводит к субпуассоновской статистике (конкретно к антигруппировке событий).

Хотя в реальных физических системах, как правило, приходится иметь дело с движением в двух направлениях: в сторону увеличения энергии (возбуждение) и в сторону уменьшения (распад), однако мы ограничимся рассмотрением однонаправленных скачков, чтобы показать принципиальную возможность получения сильной антигруппировки событий; кроме того, поставленная задача интересна с чисто статистической точки зрения.

Пусть имеется $L + 1$ точек на окружности, разделенных равными дугами. Пронумеруем их последовательно от нуля до L. Частица испытывает мгновенные перемещения из точки k в точку $k + 1$ ($k = 0, 1, ..., L - 1$) и из точки L в точку 0. Моменты перемещений являются случайными, при этом дифференциальная вероятность dp того, что перемещение произойдет в интервале времени dt, определяется выражением $dp = \mu dt$ (μ не зависит от времени и начальной точки перемещения). Таким образом, частица делает единичные шаги в заданном направлении по окружности.

Будем считать, что в момент времени, когда частица перемещается из точки L в точку 0, регистрируется событие A. В дальнейшем нас будет интересовать статистика этих событий. Предположим также, что в момент времени $t = 0$ были реализованы некоторые начальные условия, после чего система эволюционировала неограниченно долго. При $t >> t_c = (L + 1)t_1$, где $t_1 = 1/\mu$ — характерное время перехода частицы на один шаг, процесс становится стационарным; при этом вероятность обнаружить частицу в любой точке равна $p_\infty = 1/(L + 1)$.

Будем рассматривать интервалы времени $(t, t + T)$, $t >> t_c$. Пусть $\langle N_T \rangle$ — среднее число событий A, зарегистрированных за период времени T, $\langle \Delta N_T^2 \rangle = \langle N_T^2 \rangle - \langle N_T \rangle^2$ — дисперсия этого числа. Усреднение может производиться либо по равным непересекающимся отрезкам времени $(t, t + T)$, либо по ансамблю частиц, совершающих аналогичные скачки. Параметр субпуассоновской статистики ξ_T вводится следующим образом [1, 2]:

$$\langle \Delta N_T^2 \rangle = \langle N_T \rangle(1 + \xi_T). \qquad (1)$$

Величина ξ_T характеризует отличие статистики событий A от пуассоновской; в зависимости от знака ξ_T говорят либо о группировке событий ($\xi_T > 0$), либо об антигруппировке ($\xi_T < 0$).

В настоящей работе найдена величина ξ_T в зависимости от L.

Если условие $t >> t_c$ выполнено, то справедливы следующие соотношения:

$$\langle N_T \rangle = JT, \quad J = \mu p_\infty;$$
$$\langle N_T^2 \rangle = \iint_0^T [F(t_1 - t_2) + J\delta(t_1 - t_2)]dt_1 dt_2. \qquad (2)$$

Здесь введены величина J — стационарная вероятность регистрации события A в единицу времени и функция $F(t_1 - t_2)$ — совместная вероятность того, что событие A произойдет в моменты времени t_1 и t_2 (отнесенная к $dt_1 dt_2$). Чтобы убедиться в справедливости формулы (2) для $\langle N_T^2 \rangle$, разобьем отрезок времени T на интервалы Δt_i столь малые, что вероятность зарегистрировать событие A в течение любого из них много меньше единицы. Представим N_T в виде суммы вкладов ΔN_i, а N_T^2 соответственно в виде двойной суммы:

$$\langle N_T^2 \rangle = \sum \langle \Delta N_i \Delta N_j \rangle.$$

При $i \neq j$ по определению функции F имеем $\langle \Delta N_i \Delta N_j \rangle = F(t_i, t_j)\Delta t_i \Delta t_j$; при $i = j$ — $\langle \Delta N_i^2 \rangle = \langle \Delta N_i \rangle = J\Delta t_i$. Переходя от суммирования к интегрированию, получим (2).

Очевидно, что для функции F справедливо:

$$F(\tau) = F(-\tau) = J\mu p_L(\tau), \qquad (3)$$

где $p_k(\tau)$ — условная вероятность найти частицу в точке k $(k = 0, 1, ..., L)$ в момент времени $t = \tau$, если в момент времени $t = 0$ частица находилась в точке 0. Функции p_k удовлетворяют следующим условиям:

$$p_k(0) = \delta_{k0}; \quad p_k(\infty) = p_\infty; \quad \sum_{k=0}^{L} p_k(\tau) = 1. \qquad (4)$$

С учетом (1)—(4) выражение для ξ_T принимает вид:

$$\xi_T = \frac{2\mu}{T}\int_0^T dt \int_0^{T-t} d\tau [p_L(\tau) - p_\infty]. \tag{5}$$

Наиболее простым подходом к вычислению функций p_k является метод балансных уравнений. Он основан на ансамблевом рассмотрении. Пусть имеется ансамбль частиц, для каждой из которых были реализованы начальные условия $p_k(0) = \delta_{k0}$. Далее, трактуя $p_k(\tau)$ как долю частиц, находящихся в момент времени $t = \tau$ в точке k, и исходя из баланса процессов, получим следующую $L + 1$-мерную линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dp_0/dt = \mu(p_L - p_0), \\ dp_k/dt = \mu(p_{k-1} - p_k), \quad k = 1, 2, ..., L. \end{cases} \tag{6}$$

Нетрудно показать, что система (6) с начальными условиями (4) имеет решение

$$p_k(t) = p_\infty \sum_{j=0}^{L} z^{(L+1-k)j} \exp[(z^j - 1)\mu t], \quad z = \exp\left[i\frac{2\pi}{L+1}\right]. \tag{7}$$

Разумеется, все p_k — чисто действительные величины, мнимая часть суммы (7) обращается в нуль. Решение (7) удобно представить в другом виде. Раскладывая в ряд экспоненту $\exp[z^j]$ и меняя порядок суммирования, получим

$$p_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(-\mu t)(\mu t)^{k+(L+1)m}}{[k + (L+1)m]!}. \tag{8}$$

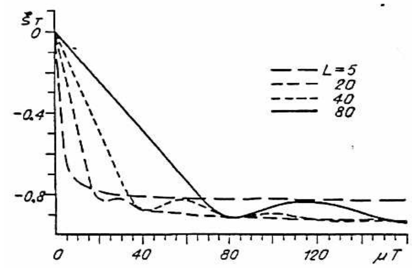
Таким образом, условные вероятности p_k имеют вид суммы пуассоновских распределений.

Для вычисления ξ_T удобнее воспользоваться формулой (7). Отметим, что в наиболее интересном случае, когда $T >> t_c$ и соответственно $\langle N_T \rangle >> 1$, интеграл (5) существенно упрощается и мы имеем

$$\xi_\infty = 2\mu \int_0^\infty [p_L(\tau) - p_\infty] d\tau = 2p_\infty \sum_{k=1}^{L} \frac{z^k}{1 - z^k} = -\frac{L}{L+1}. \tag{9}$$

В этом случае $\langle \Delta N_T^2 \rangle / \langle N_T \rangle = p_\infty$ и при $L \to \infty$ имеет место сильная антигруппировка событий.

В [2] для фотонов флуоресценции двухуровневого атома, возбуждаемого электромагнитным излучением, при некоторых оптимальных условиях был получен результат $\xi_\infty = -3/4$, что соответствует $L + 1 = 4$. Остановимся кратко на этом результате. В отличие от рассматриваемой в настоящей работе частицы, которая в любой момент времени находится в определенной точке (в «чистом» состоянии), атом может находиться и в смешанных состояниях. Вследствие этого система дифференциальных уравнений для матрицы плотности двухуровневого атома фактически четырехмерна (два уравнения для диагональных элементов и два — для действительной и мнимой частей недиагонального элемента). При условиях, наложенных в [2] на внутренние времена атома и скорость его радиационного возбуждения (эти условия и позволяют получить минимально возможное значение $\xi_\infty = -3/4$), система уравнений для матрицы плотности атома аналогична системе (6) с $L = 3$. Грубо говоря, возбуждение и релаксация атома проходят через промежуточные стадии, соответствующие смешанным состояниям; этим стадиям можно



поставить в соответствие две дополнительные точки на схеме случайных скачков.

По аналогии с изложенным выше можно предсказать для ступенчатого возбуждения трехуровневого атома или молекулы минимальное значение $\xi_\infty = -7/8$; это значение достигается при отсутствии возврата с первого возбужденного уровня на основной.

В другом предельном случае $T \ll t_c$ ($\langle N_T \rangle \ll 1$), учитывая, что $p_L(0) = 0$, получим

$$\xi_T = -JT = -\langle N_T \rangle. \qquad (10)$$

В случае произвольных T вычислить сумму, получающуюся после интегрирования (7) согласно (5), не удается. На рисунке приведены результаты численных расчетов для различных L. Как видно из рисунка, при достаточно больших L зависимость ξ_T от T имеет характер затухающих колебаний с периодом t_c. При $T \gg t_c$ ξ_T стремится к ξ_∞.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркель В. А., Штокман М. И. Нелинейные фотопроцессы в бихромофорах. Коррелированные флуктуации заселенностей и интенсивности флуоресценции // Оптика и спектроскопия.—1988.—65, вып. 6.
2. Смирнов Д. Ф., Трошин А. С. Новые явления в квантовой оптике: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, сжатые состояния // УФН.—1987.—153, вып. 2.
3. Vogel V. The dependence of the intensity correlation of resonance fluorescence from a molecule on the strength of the pump field // J. Phys. B.—1983.—16.—P. 4481.
4. Jakeman E., Jefferson J. H. Antibunching and sub-poissonian statistics in photoelectron-triggered optical dead-time experiments // Opt. Acta.—1986.—33.—P. 557.

Поступило в редакцию 29 апреля 1991 г.

УДК 535.317.25

В. А. Удод

(Томск)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ АПЕРТУР ПРИ ДИСКРЕТНОМ СКАНИРОВАНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Показано, что при выполнении некоторых ограничений, накладываемых на передаточную функцию апертуры, возможно повышение пространственной разрешающей способности апертуры за счет эффекта ее вращения вокруг своего центра во время измерения отсчетов дискретно сканируемого изображения. Оценен количественный выигрыш от операции вращения на примере прямоугольной апертуры с равномерной функцией пропускания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Маркель, М. И. Штокман, "Нелинейные фотопроцессы в бихромофорах. II. Коррелированные флуктуации заселенностей и интенсивности флуоресценции," Оптика и Спектроскопия, т. 165, с. 1258, 1988.

2. Д. Ф. Смирнов, А. С. Трошин, "Новые явления в квантовой оптике: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, сжатые состояния," УФН, т. 153, № 10, с. 233, 1987.

3. V. Vogel, "The dependence of the intensity correlation of resonance fluorescence from a molecule on the strength of the pump field," J. Phys. B, v. 16, p. 4481, 1983.

4. E. Jakeman, J. H. Jefferson, "Antibunching and sub-Poissonian statistics in photoelectron triggered optical dead-time experiments," Optica Acta, v. 33, p. 557, 1986.